第５講　ベクトル

1　[1]　$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ とする．平行四辺形 ABCD の辺 BC を $(1-\alpha):\alpha$ に内分する点を P とし，辺 CD を $\beta:(1-\beta)$ に内分する点を Q とする．また，線分 QP と平行四辺形の対角線 AC の交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ として次の問いに答えよ．

(1)　長さの比 $\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RP}}$ および $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}}$ を求めよ．

(2)　$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AD}=1$，$\angle\mathrm{DAB}=60^\circ$ とするとき，$\triangle\mathrm{AQR}$ の面積を求めよ．

[2]　1 辺の長さが 1 であるような正四面体の頂点を A，B，C，D とする．辺 AB を $(1-t):t$ に内分する点を E，辺 AC を $t:(1-t)$ に内分する点を F とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}$，$\vec{f}=\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ とするとき，$\vec{e}$，$\vec{f}$ の大きさおよび $\vec{e}\cdot\vec{f}$ を t で表せ．

(2)　$\angle\mathrm{EDF}=\theta$ とする．$0<t<1$ のとき，$\cos\theta$ の取り得る値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　原点Oを中心とする半径 r の球面上に点A，B，Cがあり $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{COA}=90^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=\theta$ $(0^\circ<\theta\leqq 90^\circ)$ である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\cos\theta=k$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　平面ABC上の点Nについて，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{n}$ を $\vec{n}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ で表すとき，$s+t+u=1$ となることを示せ．

(2)　(1)のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ の大きさが最小となるような s，t，u を k を用いて示せ．

(3)　点O，A，B，Cを頂点とする三角錐の体積 V を k と r を用いて示せ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　［1］　1辺の長さが2の正六角形ABCDEFに内接する円の中心をOとし，その円周上の点をPとする．次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{x}$ とするとき，内接円のベクトル方程式を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{x}$ で表せ．

(2)　線分BCの中点をQとする．$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を満たす k の値をすべて求めよ．ただし，$k\neq1$ とする．

［2］　空間の点P(0，0，1)を中心とする半径1の球面 S 上の点N(0，0，2)を考える．

(1)　点Nを通り，ベクトル $(a,\ b,\ 1)$ に平行な直線を l とするとき，直線 l が球面 S と交わるN以外の点Qの座標，および直線 l と xy 平面との交点Rの座標を求めよ．

(2)　球面 S と平面 $y=\dfrac{1}{2}$ の交わりを C とする．点Qが C 上を動くとき，点Rの描く図形の方程式を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　ベクトル

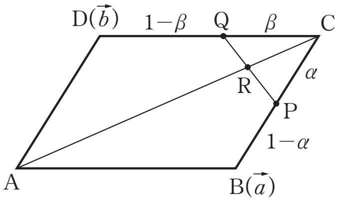
1 ［1］ $0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ とする．平行四辺形 ABCD の辺 BC を $(1-\alpha):\alpha$ に内分する点を P とし，辺 CD を $\beta:(1-\beta)$ に内分する点を Q とする．また，線分 QP と平行四辺形の対角線 AC の交点を R とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ として次の問いに答えよ．

(1) 長さの比 $\dfrac{QR}{RP}$ および $\dfrac{AR}{AC}$ を求めよ．

(2) $AB=2$，$AD=1$，$\angle DAB=60°$ とするとき，$\triangle AQR$ の面積を求めよ．

(1) $AR:RC=k:(1-k)$ とおくと $\overrightarrow{AR}=k\overrightarrow{AC}=k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ ……①

$PR:RQ=s:(1-s)$ とおくと



$\overrightarrow{AR}=(1-s)\overrightarrow{AP}+s\overrightarrow{AQ}$

$=(1-s)\{\vec{a}+(1-\alpha)\vec{b}\}+s\{(1-\beta)\vec{a}+\vec{b}\}$

$=(1-\beta s)\vec{a}+(1-\alpha+\alpha s)\vec{b}$ ……②

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は１次独立より①，②から $1-\beta s=k$，$1-\alpha+\alpha s=k$

よって $s=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$，$k=\dfrac{\alpha+\beta-\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

ゆえに $\dfrac{QR}{RP}=\dfrac{1-s}{s}=\boldsymbol{\dfrac{\beta}{\alpha}}$　　$\dfrac{AR}{AC}=\dfrac{k}{1}=\boldsymbol{\dfrac{\alpha+\beta-\alpha\beta}{\alpha+\beta}}$

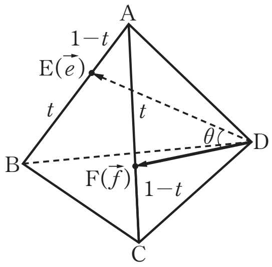
(2) $\triangle AQR=k\cdot\triangle AQC=k\cdot\beta\triangle ADC=k\cdot\beta\cdot\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot1\cdot\sin120°=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}\beta(\alpha+\beta-\alpha\beta)}{2(\alpha+\beta)}}$

1 ［2］ １辺の長さが１であるような正四面体の頂点を A，B，C，D とする．辺 AB を $(1-t):t$ に内分する点を E，辺 AC を $t:(1-t)$ に内分する点を F とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\vec{e}=\overrightarrow{DE}$，$\vec{f}=\overrightarrow{DF}$ とするとき，$\vec{e}$，$\vec{f}$ の大きさおよび $\vec{e}\cdot\vec{f}$ を t で表せ．

(2) $\angle EDF=\theta$ とする．$0<t<1$ のとき，$\cos\theta$ の取り得る値の範囲を求めよ．

$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ とすると



$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

(1) $\vec{e}=\overrightarrow{DE}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ より

$|\vec{e}|^2=t^2+2t(1-t)\times\dfrac{1}{2}+(1-t)^2=t^2-t+1$

$|\vec{e}|=\boldsymbol{\sqrt{t^2-t+1}}$

同様に $\vec{f}=\overrightarrow{DF}=(1-t)\vec{a}+t\vec{c}$ より $|\vec{f}|=\boldsymbol{\sqrt{t^2-t+1}}$

$\vec{e}\cdot\vec{f}=\{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\}\times\{(1-t)\vec{a}+t\vec{c}\}$

$=t(1-t)+\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{2}(1-t)^2+\dfrac{1}{2}(1-t)t=\boldsymbol{\dfrac{-t^2+t+1}{2}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$\cos\theta=\dfrac{\vec{e}\cdot\vec{f}}{|\vec{e}||\vec{f}|}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-t^2+t+1}{t^2-t+1}=\dfrac{1}{2}\left(-1+\dfrac{2}{t^2-t+1}\right)$

$t^2-t+1=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$　　$0<t<1$　より　$\dfrac{3}{4}\leqq t^2-t+1<1$

よって　$2<\dfrac{2}{t^2-t+1}\leqq\dfrac{8}{3}$　より　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}<\cos\theta\leqq\dfrac{5}{6}}$

2　原点Oを中心とする半径rの球面上に点A，B，Cがあり$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{COA}=90°$，$\angle\mathrm{BOC}=\theta$（$0°<\theta\leqq 90°$）である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\cos\theta=k$とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　平面ABC上の点Nについて，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{n}$を$\vec{n}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$で表すとき，$s+t+u=1$となることを示せ．

(2)　(1)のベクトル$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$の大きさが最小となるような$s$，$t$，$u$を$k$を用いて示せ．

(3)　点O，A，B，Cを頂点とする三角錐の体積Vをkとrを用いて示せ．

(1)　平面ABC上に点Nがあるとき　$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　とおける．

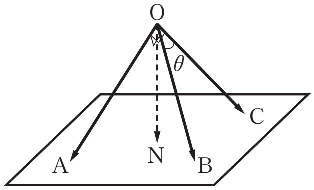
$\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\alpha(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\beta(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=(1-\alpha-\beta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

よって　$1-\alpha-\beta=s$，$\alpha=t$，$\beta=u$とおくと　$\vec{n}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$，$s+t+u=1$

(2)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=r$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=r\times r\times\cos\theta=r^2k$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

ONが最小値となるのは　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\perp$平面ABC



すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$　かつ　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$のとき

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=(-s+t+ku)r^2=0$

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=(-s+kt+u)r^2=0$

$r\neq 0$より　$s=t+ku$　かつ　$s=kt+u$

よって　$(k-1)t=(k-1)u$　　$0\leqq k<1$より　$t=u$　……①

このとき　$s=(1+k)u$　……②

①，②を$s+t+u=1$に代入して　$(3+k)u=1$　　ゆえに　$\boldsymbol{u=t=\dfrac{1}{3+k}}$，$\boldsymbol{s=\dfrac{1+k}{3+k}}$

(3)　$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{COA}=90°$　より　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp$平面OBC

$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{r^2\times r^2-(r^2k)^2}=\dfrac{1}{2}r^2\sqrt{1-k^2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=r$

ゆえに　$V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}r^2\sqrt{1-k^2}\times r=\boldsymbol{\dfrac{r^3\sqrt{1-k^2}}{6}}$

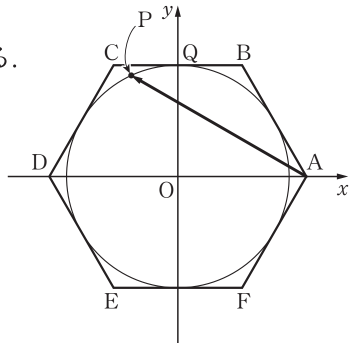
ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　[1]　1辺の長さが2の正六角形 ABCDEF に内接する円の中心を O とし，その円周上の点を P とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AP}=\vec{x}$ とするとき，内接円のベクトル方程式を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{x}$ で表せ．

(2)　線分 BC の中点を Q とする．$\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

(3)　$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AQ}$ を満たす k の値をすべて求めよ．ただし，$k\neq1$ とする．



(1)　△OAB は正三角形より，辺 AB の中点を N とすると

内接円の半径の長さは ON の長さであり，それは $\sqrt{3}$ である．

よって　$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{3}$ より　$|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AO}|=\sqrt{3}$

すなわち　$\overrightarrow{AO}=\vec{a}+\vec{b}$ より　$\boldsymbol{|\vec{x}-\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}}$

(2)　$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}=\boldsymbol{\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}}$

(3)　$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AQ}$ より　$\vec{x}=\frac{3}{2}k\vec{a}+\frac{1}{2}k\vec{b}$　　これと(1)より

$$\left|\left(\frac{3}{2}k-1\right)\vec{a}+\left(\frac{k}{2}-1\right)\vec{b}\right|=\sqrt{3}$$　ここで $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot2\cdot\cos120^\circ=-2$　より

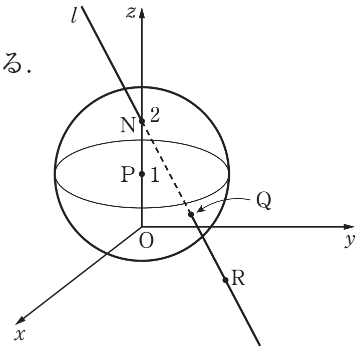
$$4\left(\frac{3}{2}k-1\right)^2-4\left(\frac{3}{2}k-1\right)\left(\frac{k}{2}-1\right)+4\left(\frac{k}{2}-1\right)^2=3$$

$(3k-2)^2-(3k-2)(k-2)+(k-2)^2=3$　　$7k^2-8k+1=0$　　$k\neq1$ より　$\boldsymbol{k=\frac{1}{7}}$

3　[2]　空間の点 P(0, 0, 1) を中心とする半径1の球面 S 上の点 N(0, 0, 2) を考える．

(1)　点 N を通り，ベクトル $(a,\ b,\ 1)$ に平行な直線を l とするとき，直線 l が球面 S と交わる N 以外の点 Q の座標，および直線 l と xy 平面との交点 R の座標を求めよ．

(2)　球面 S と平面 $y=\frac{1}{2}$ の交わりを C とする．点 Q が C 上を動くとき，点 R の描く図形の方程式を求めよ．



(1)　l 上の点を $(x,\ y,\ z)$ とすると，l のベクトル方程式より

$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 2)+k(a,\ b,\ 1)=(ak,\ bk,\ k+2)$ とおける．

これと　$S : x^2+y^2+(z-1)^2=1$ より

$$a^2k^2+b^2k^2+(k+1)^2=1$$

$(a^2+b^2+1)k^2+2k=0$　　$k\neq0$ より　$k=\dfrac{-2}{a^2+b^2+1}$

よって　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{-2a}{a^2+b^2+1},\ \dfrac{-2b}{a^2+b^2+1},\ \dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2+b^2+1}\right)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，l と xy 平面つまり $z=0$ との交点は　$k+2=0$ より　$k=-2$ のとき

ゆえに　**R$(-2a,\ -2b,\ 0)$**

(2)　Q は S 上の点である．よって　Q が C 上を動くとき，その y 座標について

$\dfrac{-2b}{a^2+b^2+1}=\dfrac{1}{2}$ より　$a^2+b^2+4b+1=0$　……①

R$(x,\ y,\ 0)$ とおくと　$x=-2a$，$y=-2b$ より　$a=-\dfrac{x}{2}$，$b=-\dfrac{y}{2}$

これらを①に代入して　$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}-2y+1=0$

ゆえに点 R の描く図形の方程式は　$\boldsymbol{x^2+(y-4)^2=12,\ z=0}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　四面体OABCにおいて，$\angle\text{AOB}=\angle\text{AOC}=\angle\text{BOC}=\theta\,(0^\circ<\theta<90^\circ)$，$\text{OA}=\text{OB}=2$，$\text{OC}=1$とする．点M，Nをそれぞれ辺OA，ABの中点とし，半直線CM上に点P，半直線ON上にQをとる．いま，PQが最小となるとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\vec{a}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{OA}}$，$\vec{b}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\text{OC}}$とするとき，$\overrightarrow{\text{PQ}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$で表せ．

(2)　$\theta=60^\circ$のとき，P，Qがそれぞれ線分CM，ONをどのような比に分けるか答えよ．また，そのときのPQの長さを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 中心が $(0,\ 0,\ 1)$，半径が1の球面が，yz 平面に平行で点 $(a,\ 0,\ 0)$ $(0<a<1)$ を通る平面と交わってできる図形を C とする．

(1) C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ y_1,\ z_1)$ と点 $\mathrm{Q}(0,\ 0,\ 2)$ を通る直線 PQ が xy 平面と交わる点を $\mathrm{R}(x,\ y,\ 0)$ とする．y_1 と z_1 をそれぞれ $a,\ x,\ y$ を使って表せ．

(2) 点 P が C 上を動くとき，点 R の軌跡を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 四面体OABCにおいて，∠AOB＝∠AOC＝∠BOC＝θ (0°＜θ＜90°)，OA＝OB＝2，OC＝1とする．点M，Nをそれぞれ辺OA，ABの中点とし，半直線CM上に点P，半直線ON上にQをとる．いま，PQが最小となるとき，次の問いに答えよ．

(1) $\vec{a}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とするとき，$\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(2) $\theta=60°$ のとき，P，Qがそれぞれ線分CM，ONをどのような比に分けるか答えよ．また，そのときのPQの長さを求めよ．

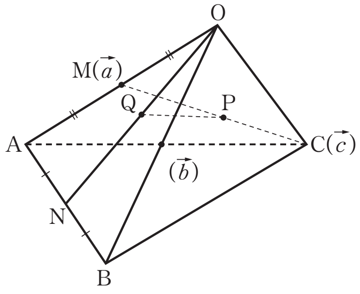
(1) PQが最小となるのは，PQ⊥CM　かつ　PQ⊥ON　のとき　である．
最短距離＝垂直となるとき

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\cos\theta$　$(0<\cos\theta<1)$

$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+(1-s)\vec{c}=\vec{c}+s(\vec{a}-\vec{c})$　$(s\geqq 0)$

$\overrightarrow{OQ}=t'\overrightarrow{ON}=t'\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=t(\vec{a}+\vec{b})$　$(t\geqq 0)$　とおける．

よって　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=-(\vec{a}-\vec{c})s+(\vec{a}+\vec{b})t-\vec{c}$



$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CM}=0$ より　$\{(\vec{c}-\vec{a})s+(\vec{a}+\vec{b})t-\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

$|\vec{c}-\vec{a}|^2=2-2\cos\theta=2(1-\cos\theta)$，

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\cos\theta-1$，$\vec{c}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=1-\cos\theta$

よって　$2s-t-1=0$　……①

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{ON}=0$ より　$\{(\vec{c}-\vec{a})s+(\vec{a}+\vec{b})t-\vec{c}\}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$

よって　$(\cos\theta-1)s+2(1+\cos\theta)t-2\cos\theta=0$　……②

①より　$t=2s-1$　これを②に代入して

$(5\cos\theta+3)s=4\cos\theta+2$　　$s=\frac{4\cos\theta+2}{5\cos\theta+3}(>0)$　　このとき　$t=\frac{3\cos\theta+1}{5\cos\theta+3}(>0)$

ゆえに　$\overrightarrow{PQ}=(t-s)\vec{a}+t\vec{b}-(1-s)\vec{c}=\boldsymbol{-\frac{\cos\theta+1}{5\cos\theta+3}\vec{a}+\frac{3\cos\theta+1}{5\cos\theta+3}\vec{b}-\frac{\cos\theta+1}{5\cos\theta+3}\vec{c}}$

(2) $\theta=60°$ のとき　$s=\frac{8}{11}$，$t=\frac{5}{11}$

ゆえに，Pは線分CMを**8：3に内分**する点，Qは線分ONを**5：6に内分**する点である．

また　$\overrightarrow{PQ}=-\frac{1}{11}(3\vec{a}-5\vec{b}+3\vec{c})$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$　より　$|3\vec{a}-5\vec{b}+3\vec{c}|^2=9+25+9-15-15+9=22$

ゆえに　$|\overrightarrow{PQ}|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{22}}{11}}$

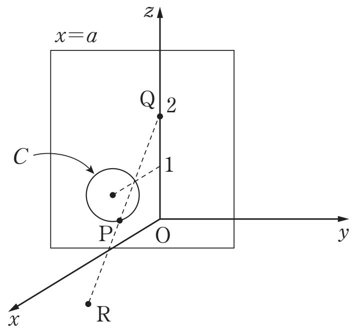
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　中心が (0, 0, 1)，半径が1の球面が，yz 平面に平行で点 $(a, 0, 0)$ $(0<a<1)$ を通る平面と交わってできる図形を C とする．

(1) C 上の点 $P(a, y_1, z_1)$ と点 $Q(0, 0, 2)$ を通る直線 PQ が xy 平面と交わる点を $R(x, y, 0)$ とする．y_1 と z_1 をそれぞれ a, x, y を使って表せ．

(2) 点 P が C 上を動くとき，点 R の軌跡を求めよ．

(1) 題意より直線 QR 上に点 P があるので



$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+t\overrightarrow{QR}$ とおける．←直線のベクトル方程式

よって　$(a, y_1, z_1)=(0, 0, 2)+t(x, y, -2)$

$a=tx$ ……①　　$y_1=ty$ ……②

$z_1=2-2t$ ……③

①より　$t=\dfrac{a}{x}$　($a\neq0$ より　$x\neq0$)

このとき　②より　$\boldsymbol{y_1=\dfrac{ay}{x}}$　　③より　$\boldsymbol{z_1=2-\dfrac{2a}{x}}$　である．

(2) C は球：$x^2+y^2+(z-1)^2=1$　と　平面 $x=a$　の交わりより　$y^2+(z-1)^2=1-a^2$

点 $P(a, y_1, z_1)$ が C 上を動くとき，

$y_1{}^2+(z_1-1)^2=1-a^2$　つまり　$\left(\dfrac{ay}{x}\right)^2+\left(1-\dfrac{2a}{x}\right)^2=1-a^2$　を満たす．

$a^2y^2+(x-2a)^2=(1-a^2)x^2$

$a^2x^2+a^2y^2-4ax+4a^2=0$

$a\neq0$ より　$x^2+y^2-\dfrac{4}{a}x+4=0$　　よって　$\left(x-\dfrac{2}{a}\right)^2+y^2=\dfrac{4}{a^2}-4$

$0<a<1$ より　$\dfrac{4}{a^2}-4=4\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)>0$

よって，求める点 R の軌跡は　**中心 $\left(\dfrac{2}{a}, 0, 0\right)$，半径 $2\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-1}$ の円**である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。